26/10/16.

Θεώρημα Schröder–Bernstein:

Αν $A \succeq B \wedge B \succeq A \Rightarrow A \simeq B$

$(E, \preceq)$: διατεταγμένο σύνολο

Πρόταση: (1) {Κάθε μη-κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του E έχει inf} $\Leftrightarrow$ {Κάθε μη-κενό κ' άνω φραγμένο υποσύνολο του E έχει sup} (2)

Αν ένα υποσύνολο του E έχει την ιδιότητα (1) ή (2) τότε λέγεται κεκορεσμένο διατεταγμένο σύνολο.

Αποδ: Έστω ισχύει το (2). Έστω $A \neq \emptyset$ κ' κάτω φραγμ. υποσύνολο του E. Έστω B το σύνολο των κάτω φραγμ. του A. Τότε $B \neq \emptyset$. Για τυχόν $x \in A$: $x \geq y$, $\forall y \in B$. δηλαδή το τυχόν $x \in A$ είναι άνω φράγμα του B.
Δηλαδή το B είναι μη κενό κ' άνω φραγμένο $\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists \sup B = b$.
Έστω $x \in A \xrightarrow[\text{του } B]{x: \text{άνω φρ.}} x \geq b = \sup B \Rightarrow b$: κάτω φράγμα του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow b \in B \Rightarrow \boxed{\inf A = b}$.

Ασκ: Έστω X: σύνολο κ' $\varphi: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ αύξουσα (ως προς $\subseteq$). Νδο $\exists D \in \mathcal{P}(X)$: $\varphi(D) = D$. (Θ-1)

Λύση:

$$\mathcal{C} = \{ S \subseteq X : S \subseteq \varphi(S) \}$$

$\emptyset \subseteq \varphi(\emptyset)$ ισχύει πάντα $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$.

$D = \bigcup \mathcal{C}$. $\quad S \in \mathcal{C} \Rightarrow S \subseteq \bigcup \mathcal{C} = D \xrightarrow{\varphi \uparrow} \varphi(S) \subseteq \varphi(D)$
$\quad S \in \mathcal{C} \Rightarrow S \subseteq \varphi(S)$

$\Rightarrow S \subseteq \varphi(D)$, $\forall S \in \mathcal{C}$ (*)

(*) $\Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S \subseteq \varphi(D) \Rightarrow \bigcup \mathcal{C} \subseteq \varphi(D) \Rightarrow \boxed{D \subseteq \varphi(D)}$ (1)

(1) $\Rightarrow \varphi(D) \subseteq \varphi(\varphi(D)) \Rightarrow \varphi(D) \in \mathcal{C} \Rightarrow \boxed{\varphi(D) \subseteq \bigcup \mathcal{C} = D}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \boxed{\varphi(D) = D}$

Είναι το $\mathcal{P}(X)$: κεκορ. δίνο σύνολο;

$X \in \mathcal{P}(X)$ | $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$
$\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ | $\bigcup \mathcal{C} = A$ $\Big\} \Rightarrow (\forall Y \in \mathcal{C})$: $Y \subseteq \bigcup \mathcal{C} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow A$: άνω φράγμα της $\mathcal{C}$

Έστω Z τυχόν άνω φρ. της $\mathcal{C}$. Τότε $(\forall Y \in \mathcal{C})$: $Y \subseteq Z$
$\Rightarrow \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} Y \subseteq Z \Rightarrow \bigcup \mathcal{C} \subseteq Z \Rightarrow A \subseteq Z \Rightarrow \boxed{\sup \mathcal{C} = A}$

Άρα $\mathcal{P}(X)$: κεκορεσμένο δίνο σύνολο.

Θεώρημα Knaster: Έστω A κεκορεσμένο δίνο σύνολο με max κ' min κ' $\varphi: A \to A$ αύξουσα. Τότε φ: έχει σταθ. σημ. α

Απόδειξη: $X=\{x\in A : x \preceq \varphi(x)\}\subseteq A$

$X\neq\emptyset$ αφού $\min A\in X$ δηλ $\min A \preceq \varphi(\min A)$

X άνω φραγμένο από $\max A$ $\xrightarrow{A:\text{κεκορεσμένο}}$ $\exists \sup X=\alpha$

Έστω $y\in X : y\preceq \alpha \xrightarrow{\varphi\uparrow} \varphi(y)\preceq\varphi(\alpha)\Rightarrow$

$\xrightarrow{y\in X \Rightarrow y\preceq\varphi(y)} y\preceq\varphi(\alpha),\ \forall y\in X \Rightarrow \varphi(\alpha)$: άνω φράγμα του X.

Άρα $\alpha\preceq\varphi(\alpha) \xrightarrow{\varphi\uparrow} \varphi(\alpha)\preceq\varphi(\varphi(\alpha)) \Rightarrow \varphi(\alpha)\in X \Rightarrow \varphi(\alpha)\preceq \sup A=\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\varphi(\alpha)}$

$A\simeq B \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \exists f: A \xrightarrow{\text{επί}} B$, f αμφ.

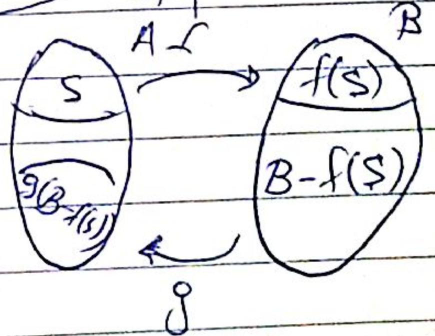
$A\succeq B \Leftrightarrow \exists f: B\to A$, f αμφ

$f(x,y)=2^x(2y+1)\quad \forall x,y\in\mathbb{N}$

$f(x)=(x,1)\ .\ \forall x\in\mathbb{N}.$

Απόδειξη Θ. Schröder-Bernstein:

Έστω $A\succeq B \wedge B\succeq A$. Άρα $\exists f: A\to B$ αμφ κ' $g: B\to A$ αμφ



$\varphi: \mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$

$\varphi(S)=A-g(B-f(S)),\ S\in\mathcal{P}(A)$

Έστω $X\subseteq Y$ με $X,Y\in\mathcal{P}(A)$

Τότε $f(X)\subseteq f(Y)\Rightarrow B-f(X)\supseteq B-f(Y)\Rightarrow$

$\Rightarrow g(B-f(X))\supseteq g(B-f(Y))\Rightarrow$

$\Rightarrow A-g(B-f(X))\subseteq A-g(B-f(Y)) \Rightarrow \varphi(X)\subseteq\varphi(Y)\Rightarrow \varphi$: αύξουσα ως προς '$\subseteq$'

Από Θ_1) $\Rightarrow (\exists D\subseteq A)$ (δηλ $D\in\mathcal{P}(A)$) : $\boxed{\varphi(D)=D}$

Δηλαδή $D=A-g(B-f(D))\Rightarrow$

$\overset{*}{\Rightarrow} A-D=g(B-f(D))$

(*) $X=Y-Z \Rightarrow$

$\Rightarrow Y-X=Z$

Η $g^{-1}: (A-D) \xrightarrow{\text{επί}} B-f(D)$ αμφ

Έστω $\omega: A\to B$ ώστε $\omega(x)=\begin{cases} f(x), & x\in D \\ g^{-1}(x), & x\in A-D\end{cases}$

Η ω είναι αμφ. κ' επί $\Rightarrow \boxed{A\simeq B}$